243 - Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Choix : on regarde juste les séries entières à variable complexe. Après quelques définitions tournant autour de la zone de convergence d'une série entière, on étudiera les propriétés de la somme d'une SE. On verra ensuite ce qui se passe sur le bord du disque de cv, avant de voir quelques applications.

I) Le rayon de convergence [P] + [Gou]

Déf : [P 215]

Lemme d'Abel : [P 215]

Déf : rayon de cv, disque de cv [P 215]

Théorème : une série entière converge absolument sur D(0,R), et le terme général n'est même pas borné si $|z|>r$; sur le cercle, on sait rien ; sur tout compact contenu dans le disque, la cv est normale [P 215-216]

Dessin : [P 216]

Prop : déterminer le rayon de cv : d'Alembert [P 217]

Ex : [P 218]

Prop : déterminer le rayon de cv : Hadamard [P 217]

Ex : [P 217]

Prop : somme et pdt de SE [Gou 237]

II) Somme d'une série entière [Tau] + [Gou]

1) Régularité de la somme sur D(0,R) [Tau] + [Gou]

Prop : la somme est continue sur le disque ouvert de convergence [Tau 38] *(csq de la convergence normale sur tout compact inclus dans le disque)*

Cor : les zéros d'une somme de série entière sont isolés [Gou 239]

Csq : DL de S au vois de zéro [Tau 38] *(immédiat)*

Déf : série dérivée [Tau 39] *(a priori, la somme de la série dérivée n'est pas égal à la dérivée de la somme)*

Prop : une série et sa série dérivée ont même rayon de cv [Tau 39] *(le lemme d'Abel montre que le rayon de la série dérivée est plus petit que celui de la série de départ. Ruse et formule du binôme pour l'autre sens)*

Th : en tout point du disque de cv, la somme f de la série entière est dérivable au sens complexe, et S' vaut la somme de la série dérivée [Tau 39]

Cor : infiniment dérivable [Tau 40]

Appl : si S est la somme d'une série entière $\sum a_n z^n$ alors $a_n = S^{(p)}(0)/n!$ [Tau 40] *(immédiat à partir de la formule de la dérivée de la somme S)*

2) Fonctions développables en série entière [Tau]

Def : fonction DSE en un point [Tau 40]

Th : soit f DSE autour de 0. Alors f est infiniment dérivable et son DSE est celui de Taylor [Tau 40] *(il existe D(0,R) où f est somme d'une série entière, donc infiniment dérivable. De plus on sait que a_n=f^(p)(0)/n!)*

Corollaire : unicité etc [Tau 41] *(si f=∑a_nz^n=∑b_nz^n sur D(0,R) alors a_n=b_n=f^(p)(0)/n!)*

Csq : si S est paire, ses termes impairs sont nuls, et inversement [Com 130] *(en effet, S(z) coïncide avec S(-z), et les identifications donnent a_n=-a_n pour les n impairs)*

Exemples de fonction DSE [Partout]

3) Analycité de la somme d'une série entière [Tau]

On a montré que si f=∑a_nz^n sur D(0,R), f est somme de sa série de Taylor en 0. Là on va montrer qu'en tout point z_0 de D(0,R), f(z)= ∑f^(n)(z_0)(z-z_0)^n au voisinage de z_0.

Def : fonction analytique [Tau 50]

Th : la somme f d'une série entière est analytique sur D(0,R) et somme de sa série de Taylor [Tau 51] *(on note S_p la somme partielle de la série qui est censé converger vers f : S_p=sum(f^(k)(z_0)(z-z_0)^k/k!). On exprime f^(k)(z_0) comme somme d'une série grâce au th de dérivation successive. Ca nous donne une double somme qu'on découpe en deux, on mq qu'une partie tend vers f et l'autre vers 0)*

Csq : exp est analytique

4) Formule de Cauchy et appl [Gou]

Prop : formule de Cauchy [Gou 239]

Th : théorème de Liouville [Gou 248]

Appl : d'Alembert Gauss **[???]**

III) Comportement de la somme sur le bord du disque

Rq : tout peut se produire sur le cercle critique [ZQ 40]

Ex : la série des n^a*z^n. Son rayon de cv est 1. Si a=0, la série diverge en tout point du cercle unité. Si a=-1, la série cv sur tout le disque sauf en 1 (difficile à montrer, règle d'Abel) ; si a=-2, ça converge partout [ZQ 40]

1) Théorème d'Abel [ZQ] + [Gou]

Th : Abel non tangentiel. Soit une série ∑a_nz^n qui cv sur D(0,R). Soit z_0 un pt du cercle tq ∑a_n.z_0^n cv. On note f la somme de la série. On fixe theta un angle dans [0,Pi/2[, qui définit un secteur angulaire centré sur le segment [0,z_0]. Alors la série converge uniformément vers f sur le secteur fermé. En particulier, f(z) tend vers ∑a_nz_0^n lorsque z tend vers z_0 tout en restant dans le secteur angulaire [ZQ 42] *(preuve difficile dans le ZQ, faite dans le Gourdon pour z_0=1)*

(cor : Abel radial : la série cv uniformément sur [0,z_0], on a juste pris theta=0 dans le th)

Appl : Arctan(x)=$\sum\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ et cv en 1. Le th donne : arctan(x)->$\sum\frac{(-1)^n}{2n+1}$ qd x tend vers 1. Or Arctan(x)_>Arctan(1)=Pi /4. Donc $\sum\frac{(-1)^n}{2n+1}$ =Pi/4. Pareil pour ln(1+x).

Rq : si ∑a_nR^n cv absolument alors le th est évident parce que ∑a_n cv normalement pour |z|≤R [Gou 253]

Rq : réciproque fausse (c-ex) [Gou 253]

2) Théorème de Tauber [Gou]

Si on impose des conditions aux coeffs a_n alors la réciproque peut marcher

Th (Taubérien faible, 1897) : si $\sum a_n z^n$ est une SE de rayon R, de somme f, que f tend vers un complexe S quand z tend vers z_0, et que $a_n=o(1/n)$ alors $\sum a_n z_0^n$ cv vers S [Gou 253]

Rq : le th reste vrai si on remplace $o(1/n)$ par $O(1/n)$: th Taubérien fort montré par Hardy-Littlewood en 1911.

3) Points réguliers, points singuliers [ZQ 50-54]

Les théorèmes de cette partie sont difficiles à montrer.

Déf : un point du cercle est régulier si on peut prolonger analytiquement la somme sur un voisinage du point. Sinon il est dit singulier. On note A_r et A_s leur ensemble.

Prop : A_r est ouvert dans C, A_s est fermé.

Ex : série des z^n.

Th : il y a toujours au moins un point singulier sur C

Prop : supp tous les a_n positifs. Alors 1 est singulier pour la série entière

Th (lacunes de Hadamard) : soit l_n une suite d'entiers tq $l_{n+1}/l_n>\alpha>1$ (ils croissent assez vite). Soit $\sum a_n z^{l_n}$ une SE de rayon de cv 1. Alors tous les points du cercle sont singuliers.

IV) Quelques applications

1) Résolution d'équations différentielles

Méthode : on cherche les solutions DSE, on injecte dans l'équation, on trouve des relations de récurrence sur les a_n, on conclut.

Ex : [Mois 91]

2) Dénombrement

Prop : nombre de dérangements [FGN alg1]

Nombre de solutions à l'équation … [Gou]

AUTRE

3) Calcul d'intégrales

Méthode : DSE

Exemple : [FerrRab 49]

4) Approximation par une série universelle

Approx par une SE universelle : il existe une série universelle $\sum a_n x^n$ à coefficients rationnels tq pour toute appl continue f de [0,1] dans R s'annulant en 0, il existe un groupement de termes de la série entière donnant une série de fonctions qui cv unif vers f sur [0,1] [Mois 25] *(groupement de termes veut dire qu'on somme les premiers termes, puis* *on en saute, puis on somme un tas suivant, puis on en saute etc) (on commence par mq on peut approcher uniformément un tel f par des polynômes rationnels du type x^mP(x)).*

Développements :
1 - Dénombrement des partitions d'un entier [Gou An 249] (**)
2 - Théorème de Bernstein [Gou An 250] (**)

Bibliographie :
[P] Pommellet
[Gou] Gourdon – Analyse
[Tau] Tauvel – Analyse complexe pour la Licence 3
[Mois] Moisan & Vernotte & Tosel – Suites et séries de fonctions
[FerRab] Ferrier-Raboin – Calcul intégral

Rapport du jury : la leçon relative à la convergence des séries entières et aux propriétés de la somme a trop souvent été limitée à la variable complexe (voire réelle), excluant de ce fait les séries matricielles, ou sur une algèbre de Banach.
Méthode de Laplace ?